EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

On suppose connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$

- ⋆ si pour tout $x \in [a\,;\,b]$ $\quad u(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b [u(x) + v(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b \alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ où α est un nombre réel.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

PARTIE B :

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

b. Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

b. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm^2 du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
Déterminer un encadrement de $\mathscr{A}$.

c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

d. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -2i, \quad z_B = -\sqrt{3}+i \text{ et } z_C = \sqrt{3}+i.$$

1. **a.** Écrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.

   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2. **a.** Écrire le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

   b. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

   a. Montrer que le point O′, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3}-i$.

   b. Démontrer que les points C et O′ sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.

   c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

   d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.

4. **a.** Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = \left|z+\sqrt{3}+i\right|.$$

   b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

Exercice de spécialité:

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats

   a. Étudier la parité de l'entier $A(11)$.

   b. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

   c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.

   d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

$$n^8 \equiv 1 \mod d.$$

2. Recherche de critères

   Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \mod d$.

   a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.

   b. En déduire que s est un diviseur de 8.

   c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d-1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

   Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s = 1$, $s = 2$ puis $s = 4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

   Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   a. Vérifier que $P(X = 0) = \dfrac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
   A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
   si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.
   a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :
   B : « seule la première boule tirée est verte »,
   C : « une seule des deux boules tirées est verte ».
   b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace

$\mathscr{P}$ est le plan passant par A(3 ; 1 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}\,(1\ ;\ -4\ ;\ 1)$;

$\mathscr{D}$ est la droite passant par B(1 ; 4 ; 2) de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 3)$.

$\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1\ ;\ 9\ ;\ 0)$ passant par A.

1. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
   a. Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x - 4y + z - 1 = 0$.
   b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.
2. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   a. Calculer la distance d du point Ω au plan $\mathscr{P}$.
   b. Calculer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$. En déduire l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.
3. Intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.
   b. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.
   c. En déduire que la droite $\mathscr{D}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ en deux points M et N distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.